E.I. T.P.E. 1979

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

- OPTION M -

(temps accordé : 4 heures)

AVERTISSEMENT

. Dans ce problème on cherche à trouver un équivalent de $f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} x^{m^k}$ lorsque x tend vers 1 en restant sur le segment $[0,1[$.

. Pour ce faire, on examinera d'abord, dans la partie I, le comportement de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} x^n$ dans les mêmes conditions.

. On établira ensuite le résultat concernant f dans la partie II.

. Dans la partie III enfin, on tirera quelques applications de ce résultat à la représentation de nombres entiers comme somme de puissances k-ièmes ; et notamment :

+ Y-a-t-il "beaucoup" (dans un sens qu'on précisera à l'aide de la notion de densité) de nombres qui sont somme de r puissances k-ièmes, pour r fixé.

+ De combien de façons différentes un nombre peut-il s'écrire comme somme de r puissances k-ièmes.

Les candidats s'efforceront de présenter avec soin et rigueur toutes les démonstrations et les calculs qui sont demandés.

Pour comparer des suites, ou des fonctions, au voisinage d'un point, il sera utile d'utiliser les notions d'équivalents, ou les notations de Landau : $O(U_n)$, $o(V_n)$ ...

I

. Dans la partie I, on désigne par α un nombre réel fixé tel que $\alpha > -1$.

. On rappelle que, si $a \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} z^n$$

et que ce développement est valable pour $|z|<1$.

1) On note b_n le coefficient de z^n dans le développement en série entière de $(1-z)^{-(1+\alpha)}$

On pose donc $\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} = (1-z)^{-(1+\alpha)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

a) Donner en fonction de α et n, l'expression de b_n.
Montrer que $b_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

2) a) Montrer que, pour $n \geq 2$ on a

$$\text{Log}\ \frac{b_n}{n^{\alpha}} = \text{Log}\ (1+\alpha) + \sum_{j=2}^{n} \left(\text{Log}\ (1+\frac{\alpha}{j}) - \alpha\ \text{Log}\ (\frac{j}{j-1}) \right)$$

b) On posera $u_j = \text{Log}\ (1+\frac{\alpha}{j}) - \alpha\ \text{Log}\ (\frac{j}{j-1})$.

A l'aide d'un développement limité de u_j, quand $j \to +\infty$, montrer que : $\sum_{j=2}^{n} u_j$ converge. On notera U sa limite qui dépend de α.

c) En déduire qu'il existe un réel C_{α} , tel que $C_{\alpha} > 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{C_{\alpha}\, b_n}{n^{\alpha}} = 1$$

On ne demande pas de calculer C_{α}.

N.B. Les nombres b_n définis en 1) dépendent de α. C'est pour simplifier l'écriture, lorsqu'aucune confusion n'est possible, que l'on ne fait pas apparaître cette dépendance par rapport à α. Toutefois, dans la suite, les candidats pourront utiliser la notation $b_n(\alpha)$ (ou $b_n(\alpha-1)$, $b_n(\frac{1}{k})$ etc....) pour préciser la valeur de α considérée.

3) a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\text{Log } \frac{C_\alpha\, b_n}{n^\alpha} = -\sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j$.

b) En déduire qu'il existe une constante $A > 0$, qui ne dépend que de α, telle que

$$\left| \text{Log } \left(\frac{C_\alpha\, b_n}{n^\alpha} \right) \right| \leqslant A \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

c) En comparant $\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$ avec $\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$,

montrer que :

$$\left| \text{Log } \left(\frac{C_\alpha\, b_n}{n^\alpha} \right) \right| \leqslant \frac{A}{n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

d) En déduire l'existence d'une constante $B > 0$, qui ne dépend que de α, telle que

$$\left| C_\alpha\, b_n - n^\alpha \right| \leqslant B\, n^{\alpha-1} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1.$$

4) On suppose dans cette question $\alpha > 0$.

a) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$ converge pour $|x| < 1$.

b) Démontrer qu'il existe une constante $M_\alpha > 0$ telle que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leqslant x < 1$, on ait

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n - \frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}} \right| \leqslant \frac{M_\alpha}{(1-x)^\alpha}.$$

On utilisera 3.d) puis on pourra trouver un équivalent de $n^{\alpha-1}$ en s'inspirant de 2.c) et en considérant $\beta'_n = b_n\,(\alpha-1)$.

5) a) Que vaut C_0 ?

b) Calculer $C_{\frac{1}{2}}$. On reviendra pour cela à l'expression de b_n trouvée en 1) en faisant $\alpha = \frac{1}{2}$. Puis on pourra obtenir un équivalent de $n!$ à l'aide de la formule de Stirling :

$$\frac{n!}{n^n\, e^n\, \sqrt{2\pi n}} \to 1 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

II

Dans cette partie, k est un entier fixé tel que $k \geqslant 2$.

On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ par les relations :

$a_n = 1$ si $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = m^k$

$a_n = 0$ sinon.

1) On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{m=1}^{+\infty} x^{m^k}$.

Quel est le rayon de convergence de cette série entière.

2) a) Montrer que la fonction f définie comme somme de cette série entière est continue sur $]-1, 1[$.

b) Montrer que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$

On pourra se donner $A > 0$, choisir un entier $N > A$ et examiner $\sum_{m=1}^{N} x^{m^k}$ pour $0 \leqslant x < 1$, x voisin de 1.

3) Si $y \in \mathbb{R}$, on note $[y]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant y$.

Démontrer que pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{1}{1-x}\, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n^{1/k} \right] x^n.$$

On pourra montrer que $\sum_{p=1}^{n} a_p = \left[n^{1/k} \right]$.

4) Déduire de ce qui précède, que pour $0 \leqslant x < 1$

$$\left| \frac{f(x)}{1-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/k}\, x^n \right| \leqslant \frac{x}{1-x}$$

5) A l'aide de la question 4b) de la partie I montrer l'existence de $\gamma > 0$ et $M > 0$ tels que pour $0 \leqslant x < 1$ on ait

$$\left| f(x) - \frac{\gamma}{(1-x)^{1/k}} \right| \leqslant M.$$

γ et M dépendent de k.

Que vaut γ lorsque $k = 2$?

.../...

III

. Si $A \subset \mathbb{N}$, on désigne par $\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa fonction caractéristique ; c'est-à-dire

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in A \\ 0 \text{ si } n \notin A \end{cases}$$

. On dira que l'ensemble A est <u>régulier</u> si

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_A(n)\, x^n \right| \text{ existe.}$$

Dans ce cas on note $d(A)$ cette limite et on l'appelle <u>densité</u> de A.

1) a) Si A est régulier, montrer que $0 \leqslant d(A) \leqslant 1$.

b) Quelle est la densité de $\mathbb{N}$?
Quelle est la densité d'une partie F <u>finie</u> de $\mathbb{N}$?

c) Si A et B sont réguliers et $A \cap B = \emptyset$ montrer que $A \cup B$ est régulier et $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

d) Quelle est la densité de l'ensemble des nombres entiers de la forme $n = am + b$ où m décrit $\mathbb{N}$. ($a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$ sont fixés).

2) Soit k un entier $\geqslant 2$. Soit A_k l'ensemble des entiers $\geqslant 1$ qui sont puissance k-ième d'un entier.
Donc $A_k = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid \exists\, m \in \mathbb{N}^* \text{ avec } n = m^k \}$.
Montrer que A_k est régulier et $d(A_k) = 0$.
On remarquera que $\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{A_k}(n)\, x^n = f(x)$ où f est la fonction définie dans la partie II, et on utilisera la question 5) de la partie II.

3) On désigne toujours par $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{m=1}^{+\infty} x^{m^k}$ définie dans la partie II.
On donne $r \geqslant 1$ un entier fixé.
Montrer que $f(x)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_r(n) x^n$ pour $|x|<1$, où $\varphi_r(n)$ est le cardinal de l'ensemble

$$\{ (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{N}^{*r} \mid x_1^k + x_2^k + \ldots + x_r^k = n \}.$$

On pourra procéder par récurrence sur r.

4) On note A_k^r l'ensemble des entiers positifs qui s'expriment comme la somme de r puissances k-ièmes d'entiers positifs :

$$A_k^r = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid \exists\, (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^* \text{ avec } m_1^k + m_2^k + \ldots + m_r^k = n \}.$$

Montrer que si $r < k$ alors A_k^r est régulier et de densité nulle.

On pourra montrer que $\chi_{A_k^r}(n)$ est majoré par $\varphi_r(n)$.

5) a) Montrer que si $r > k$, $\varphi_r(n)$ n'est pas borné lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$.

b) On suppose $r > k$ et on pose $\alpha = \frac{r}{k} - 1$.
Montrer que, si K est un réel tel que $0 < K < \frac{\gamma^r}{C_\alpha}$,

il existe une infinité d'entiers n tels que $\varphi_r(n) \geqslant K n^\alpha$.

(Les notations γ et C_α renvoient respectivement aux parties II et I).

c) Application :
Quel est le meilleur résultat obtenu concernant les valeurs de $\varphi_3(n)$, lorsque $k = 2$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail